ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-2023

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-4x}{x+2}$

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7x^3-5x}{3x^2-4}$

Λύση

3 2

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-4x}{x+2}=\frac{2\cdot 1^2-4\cdot 1}{1+2}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

2 1 1 1

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7x^3-5x}{3x^2-4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7}{3}x=\frac{7}{3}\lim\limits_{x\to +\infty}x=\frac{7}{3}\cdot(+\infty)=+\infty$

Α2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις.

α)	Ισχύει ότι $\sqrt{x^2}=x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β)	Η εξίσωση $\eta\mu x=-1$ έχει λύσεις $x=2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ)	Αν $f(x)=\|x\|-x$, με $x>0$ τότε $f(x)=0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ)	$\eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 5x\eta\mu 3x=\eta\mu 8x$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Λύση

4 x 2,5

α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

Α3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>-3 \\ x^2+2x-5, & x\leq -3 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0=-3$.

Λύση

1 1 1

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+}(x+1) = -3+1=-2$

1 1 1

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-}(x^2+2x-5) = (-3)^2+2(-3)-5 = 9-6-5=-2$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -2 \;\; \acute{\alpha}\rho\alpha \;\; \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -2$ 2

Επίσης, $f(-3)=(-3)^2+2(-3)-5=9-6-5=-2$ 1

Επομένως, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = -2$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0=-3$. 0,5+0,5

Α4. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$f(x)=\frac{x}{x^2-16}$ (3 μον.)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g με τύπο:

$g(x)=\frac{x-4}{x+2}, \;\; x\in\;(0,+\infty)$ (7 μον.)

Λύση

α) $f(x)=\frac{x}{x^2-16}$ 0,5 0,5

$x^2-16\neq 0 \Rightarrow (x-4)(x+4)\neq 0$ 0,5+0,5

$x\neq 4$ και $x\neq -4$ 1

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,-4)\cup(-4,+4)\cup(+4,+\infty)$ ή $D_f=\mathbb{R}-\{\pm 4\}$

β) $g(x)=\frac{x-4}{x+2}, \;\; x\in\;(0,+\infty)$

$y=\frac{x-4}{x+2} \Longrightarrow y(x+2)=x-4 \Rightarrow yx+2y=x-4$ 1

$yx-x=-2y-4$

$x(y-1)=-2y-4$ 1

$x=\frac{2y+4}{1-y}\;, \;\; y\neq 1$ 1

Επιπλέον, πρέπει $x > 0$ δηλαδή $\frac{2y+4}{1-y} > 0 \Rightarrow \frac{2(y+2)}{1-y} > 0$ 2

y	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
πρόσημο της $\frac{2y+4}{1-y}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

1

Το σύνολο τιμών της g είναι $R_g = (-2,1)$.   1

A5. α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x$ (3 μον.)

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ (7 μον.)

Λύση

α) Α΄ μέλος: $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu 2x + 1 + \sigma\upsilon\nu x$ 3 x 1

$= 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 1 + \sigma\upsilon\nu x$

$= 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x =$ Β΄μέλος

β) $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x = 1$ (από το αποτέλεσμα ερ. (α))

$2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

$(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$ 2

1   $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -1$ 1

0,5 $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi$ 0,5

1   $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi \pm \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

1

A6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+8}}{\sqrt{x-4}}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$ αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν οι πιο πάνω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

Λύση

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-6x+8}}{\sqrt{x-4}}$ πρέπει

0,5 0,5

$x^2-6x+8\geq 0$ και $x-4>0$

$x^2-6x+8\geq 0 \Longrightarrow (x-4)(x-2)\geq 0$ 0,5

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
πρόσημο του x^2-6x+8	$+$	0	$-$	0	$+$

1

Άρα, $x\leq 2$ ή $x\geq 4$ 1

και

$x-4>0 \Leftrightarrow x>4.$ 0,5

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(4,+\infty)$. 0,5

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $g(x)=\sqrt{x-2}$ πρέπει

$x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2.$ 1

Άρα, το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=[2,+\infty)$. 0,5

Επειδή $D_f\neq D_g$ οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες. 1

1

Όμως για κάθε $x\in D_f\cap D_g=(4,+\infty)$ ισχύει

1

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-6x+8}}{\sqrt{x-4}}=\sqrt{\frac{(x-4)(x-2)}{x-4}}=\sqrt{x-2}=g(x)$$

Επομένως, $f(x)=g(x),\ \forall\, x\in(4,+\infty)$. 1

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

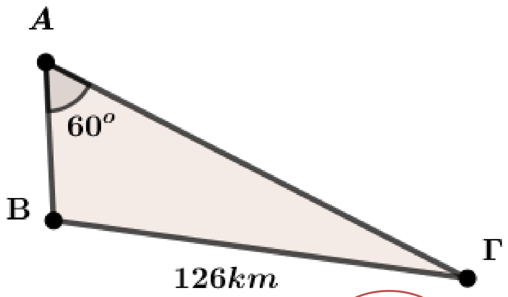
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Β1. Δύο ελικόπτερα απογειώνονται από το σημείο A, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το πρώτο διανύει την απόσταση AB ενώ το δεύτερο διανύει την απόσταση $A\Gamma$. Δίνεται ότι η απόσταση $A\Gamma$ είναι τριπλάσια της απόστασης AB. Αν, επιπλέον, η γωνία μεταξύ των δύο πτήσεων είναι 60^o και η απόσταση $B\Gamma = 126\ km$, τότε:

α) Να δείξετε ότι η απόσταση $A\Gamma = 54\sqrt{7}\ km$ (7 μον.)

β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής όπως καθορίζεται από το τρίγωνο $AB\Gamma$ (3 μον.)



Λύση

α) Θέτω $(AB) = x$, άρα $(A\Gamma) = 3x$ 1

Από Νόμο Συνημιτόνων έχουμε:

$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 - 2(AB)(A\Gamma)\sigma\upsilon\nu\hat{A}$ 2

$126^2 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x\ \sigma\upsilon\nu 60°$ 1

$15876 = 10x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2}$ 1

$15876 = 7x^2$ 0,5

$x^2 = 2268$ 0,5

$x = 18\sqrt{7} \Rightarrow (AB) = 18\sqrt{7}km \quad \Rightarrow \quad (A\Gamma) = 54\sqrt{7}km$

0,5 0,5

1

β) $E = \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)\eta\mu\hat{A}$

1

$= \frac{1}{2}(18\sqrt{7})(54\sqrt{7})\eta\mu 60° = 1701\sqrt{3}\ km^2$ 1

<u>**Σημείωση**</u>: $(\mathbf{-0,5}$ **μον.**$)$ μόνο μια φορά αν δεν βάλουν μονάδες μέτρησης.

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu 6x-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 5x+\eta\mu 3x},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=-2\eta\mu x$

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή κανένα από τα δύο.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}$

Λύση

α) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 6x-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 5x+\eta\mu 3x}=\dfrac{2\eta\mu\frac{2x-6x}{2}\,\eta\mu\frac{6x+2x}{2}}{2\eta\mu\frac{5x+3x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{5x-3x}{2}}$ 2

$$=\frac{\eta\mu(-2x)\eta\mu(4x)}{\eta\mu(4x)\sigma\upsilon\nu(x)}$$ 1

$$=\frac{-\eta\mu(2x)}{\sigma\upsilon\nu(x)}$$ 1

0,5+0,5

$$=\frac{-2\eta\mu x\;\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-2\eta\mu x$$

Άρα, $f(x)=-2\eta\mu x$

1

β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 6x-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 5x+\eta\mu 3x}$, έχει πεδίο ορισμού $D_f=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει ότι $-x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

2 1

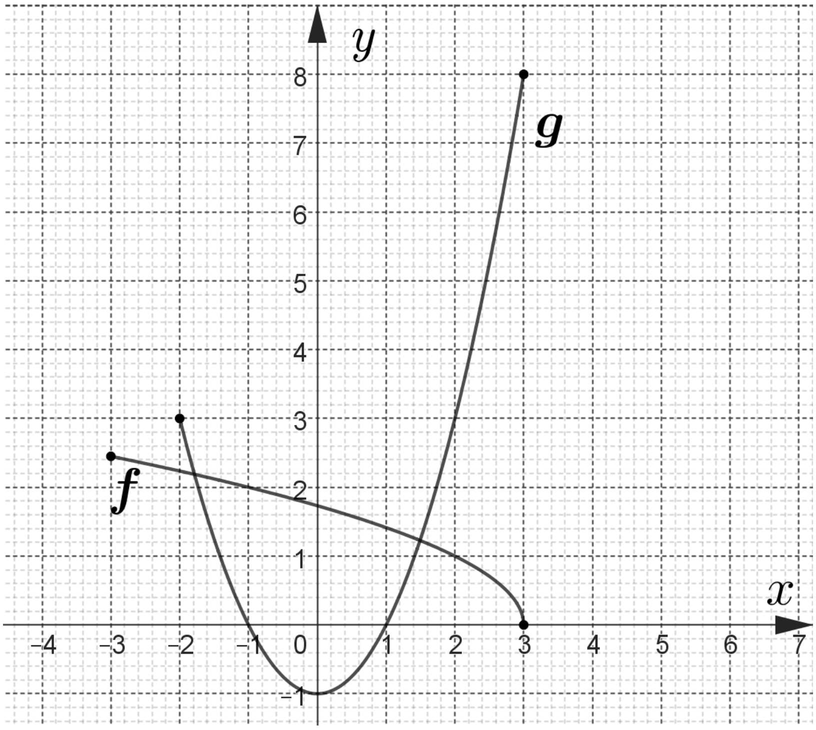
$f(-x)=-2\eta\mu(-x)=2\eta\mu x=-f(x)$

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή. 1

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-2)}{(x+1)}=1\cdot(-2)=-2$

0,5 0,5 1+1 1+0,5 0,5

B3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: A \to f(A)$ και $g: B \to \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης g. (1 μον.)

β) Με τη χρήση των γραφικών παραστάσεων των f και g, να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. (2 μον.)

i) $(f+g)(2)$

ii) $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$

iii) $g\big(f(-1)\big)$

iv) $f^{-1}\big(g(1)\big)$

γ) Αν οι τύποι των συναρτήσεων f και g, όπως δίνονται στην πιο πάνω γραφική παράσταση, είναι $f(x) = \sqrt{3-x}$ και $g(x) = x^2 - 1$, αντίστοιχα, να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $g \circ f$. (7 μον.)

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται δικαιολογώντας την απάντησή σας. Στην περίπτωση που η f αντιστρέφεται, να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

(5 μον.)

Λύση

α) $D_g = [-2{,}3]$, $R_g = [-1{,}8]$ 0,5 + 0,5 β) i) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 3 = 4$

ii) $\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)}$ δεν ορίζεται αφού $f(3) = 0$ 4 x 0,5

iii) $g\big(f(-1)\big) = g(2) = 3$

(iv) $f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(0) = 3$

0,5

γ) $f(x) = \sqrt{3-x}$, $A = [-3, 3]$

$g(x) = x^2 - 1$, $B = [-2,3]$

Το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι:

$$D_{\frac{f}{g}} = A \cap B,\ \ g(x) \neq 0 \implies x \in [-2, 3],\ \ x \neq \pm 1.$$ 0,5

Επομένως, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $D_{\frac{f}{g}} = [-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,3]$

0,5

και έχει τύπο:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-1}$, $x \in [-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,3]$.

0,5 0,5

Για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ πρέπει $A' \neq \emptyset$, όπου

0,5 0,5

$$A' = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in [-3,3] \,/ f(x) \in [-2,3]\}$$

0,5 0,5 0,5

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq \sqrt{3-x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq \sqrt{3-x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq 3-x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -3 \leq -x \leq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -6 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$ 0,5

$A' = [-3, 3] \neq \emptyset$ 0,5

Επομένως, η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται και έχει τύπο

0,5

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{3-x}\big) = \big(\sqrt{3-x}\big)^2 - 1$$
$$= 3 - x - 1 = 2 - x$$

Άρα, $(g \circ f)(x) = 2 - x$, $x \in [-3, 3]$ 0,5 δ) Η συνάρτηση f είναι επί αφού $f\colon A \to f(A)$. 0,5

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$ γιατί κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της αντιστοιχίζεται σε μόνο ένα στοιχείο x του πεδίου ορισμού της. 0,5

Ή ισοδύναμα Κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων τέμνει το πολύ σε ένα σημείο τη γραφική παράσταση της f. Άρα, η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Ή ισοδύναμα

$\forall\, x_1, x_2 \in [-3,3]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3-x_1} = \sqrt{3-x_2}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{3-x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x_2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 3-x_1 = 3-x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\Rightarrow f \text{ είναι } 1-1$$

Η f είναι $1-1$ και επί άρα αντιστρέφεται. 0,5

$f(x) = \sqrt{3-x}$, $x \in [-3,3]$

$y = \sqrt{3-x}$ $\quad (y \geq 0)$ 0,5

$$y^2 = 3-x \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 3-y^2 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3 \leq 3-y^2 \leq 3 \Rightarrow -6 \leq -y^2 \leq 0$$ 0,5

$$\Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 6$$ 0,5

$y^2 \geq 0$

$y^2 \leq 6 \Rightarrow y^2 - 6 \leq 0 \Rightarrow (y-\sqrt{6})(y+\sqrt{6}) \leq 0$

y	-∞		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		+∞
πρόσημο του y^2-6		+	0	−	0	+	

0,5

$$\left.\begin{matrix} -\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6} \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{6}$$ 1

(ή ***ισοδύναμα*** $y^2 \leq 6 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{6} \Rightarrow -\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$ *και* $y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{6}$)

Άρα, $f^{-1}(x) = 3 - x^2,\ \forall x \in \left[0, \sqrt{6}\right]$ 0,5

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ